Kuhn–Tucker Theorem

als notwendige Optimalitätsbedingung

Die Kuhn-Tucker Bedingungen ermöglichen eine Verallgemeinerung der klassischen Multiplikatormethode von Lagrange zur Bestimmung von Extrema auch mit Ungleichheitsnebenbedingungen. Zu erwähnen ist weiterhin, dass die Extremwertermittlung einer n-dimensionalen Funktion F(X) unter endlich vielen Nebenbedingungen $g_j(X)$, j = 1, … , m, mit der Annahme n < m eine praxisrelevante Aufgabenstellung der Optimierung darstellt. Die sich ergebende Lagrange-Funktion lautet:

$$\boxed{L(X,u) = F(X) \pm \sum_{j=1}^{m} u_j \, g_j(X)} \qquad (1)$$

Anmerkungen

- Das Kuhn-Tucker Theorem ist eine Verallgemeinerung von Lagrange.
- Die Multiplikatoren werden mit u bezeichnet.
- Für $g_j(X) \leq 0$ gilt das positive, sonst das negative Vorzeichen.

Es wurde nachgewiesen, dass für dieses Theorem folgende Bedingungen gelten:

$$L'(X,u) = 0: \qquad g_j(X) \leq 0$$

$$u_j \geq 0 \begin{cases} 0 & \textbf{Extrema mit verschwindenden Tangenten} \\ >0 & \textbf{Randextrema} \end{cases}$$

aktive Nebenbedingungen für $g_j(X) = 0$, falls $u_j > 0$

Das folgende Beispiel stellt eine Standardaufgabe der Optimierung dar.

$F(X) = x_1^2 + x_2^2 := \text{Min!}$ mit n = 2

$$\left.\begin{aligned} g_1(X) &= x_1 \geq 0 \\ g_2(X) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \textbf{untere Schranken der Variablen}$$

$g_3(X) = x_1 + 2x_2 - 2 \geq 0$ für m > n

Lagrangesche Funktion

$$L(X,u) = x_1^2 + x_2^2 - u_1 x_1 - u_2 x_2 - u_3 (x_1 + 2x_2 - 2) \tag{3}$$

Partielle Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - u_1 - u_3 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - u_2 - 2u_3 = 0 \tag{5}$$

Die Lösung der Gleichungen (4) und (5) erfolgt zweckmäßig über das Verfahren der Fallunterscheidung.

Fall 1: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$

Aus (4) und (5) folgt $x_1 = x_2 = 0$. Damit ist die Nebenbedingung $g_3(X) \geq 0$ verletzt und $X = (0;0)^T$ ist kein Optimalpunkt.

Fall 2: $u_1 = u_2 = 0$, $\mathbf{u_3 > 0}$

Aus der Kuhn–Tucker Bedingung für $g_3(X) = 0$, falls $u_3 > 0$, folgt

$x_1 + 2x_2 = 2$. (6)

Aus (4) für $u_1 = 0$ $\quad 2x_1 - u_3 = 0$. (7)

Aus (5) für $u_2 = 0$ $\quad 2x_2 - 2u_3 = 0$. (8)

(7) und (8) in (6) ergibt $\frac{1}{2}u_3 - 2u_3 = 2$ und damit $\boxed{u_3 = 0{,}8 > 0}$

Damit ist $g_3(X) \geq 0$ eine so genannte aktive Nebenbedingung, die das Extremum als Randminimum enthält.

Für den Variablenvektor und die Zielfunktion ergeben sich folgende Werte:

Variablenvektor $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)^T = (0{,}4\ ;\ 0{,}8)^T$

Zielfunktion $F(X^*) = 0{,}8$

<u>Fall 3:</u> $u_1 = 0$, $u_2 > 0$, $u_3 = 0$

Aus der Kuhn – Tucker Bedingung für $g_2(X) = 0$, falls $u_2 > 0$, folgt $x_2 = 0$ und damit eine Verletzung der Nebenbedingung $g_3(X) \geq 0$.

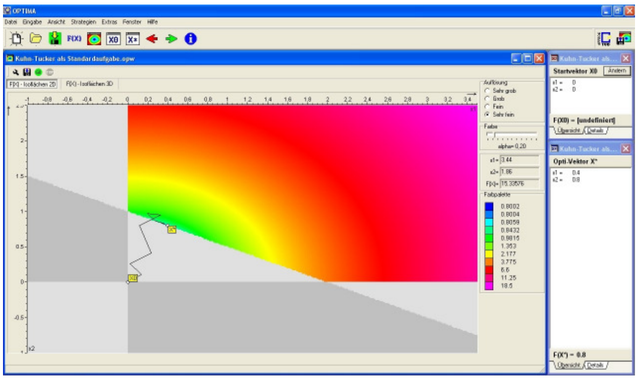
<u>Fall 4:</u> $u_1 > 0$, $u_2 = u_3 = 0$

Aus der Kuhn – Tucker Bedingung für $g_1(X) = 0$, falls $u_1 > 0$, folgt $x_1 = 0$ und damit ebenfalls eine Verletzung von $g_3(X) \geq 0$.

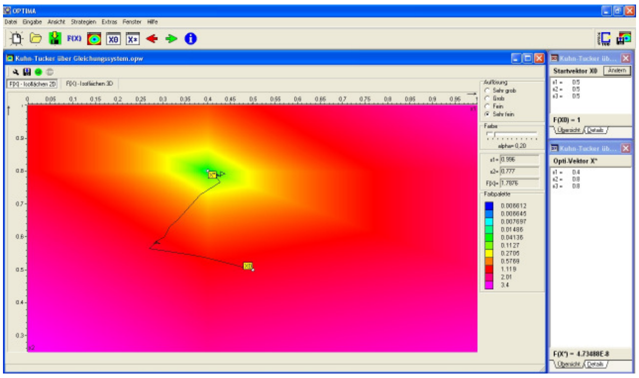
Die Untersuchungen für die Fälle 3 und 4 führen zu keinen weiteren Lösungen im Sinne der vorliegenden Aufgabenstellung.

Bei komplizierten Optimierungsaufgaben müssen mitunter viele Lösungsfälle diskutiert werden. Es lohnt sich daher, durch Vorüberlegungen irrelevante Fälle auszuschließen. Wenn also klar ist, dass Restriktionen nicht bindend (aktiv) sind, also u = 0 gilt, müssen diese nicht erst in die Lagrange-Funktion aufgenommen werden.

Isoflächen: Standardaufgabe



Isoflächen: Gleichungssystem



<u>Ergebnisse beider Verfahren</u>

Lösung über Standardaufgabe

$$x_1^* = 0{,}4 \qquad x_2^* = 0{,}8 \qquad F(X^*) = 0{,}8$$

Lösung über Gleichungssystem

$$x_1^* = 0{,}4 \qquad x_2^* = 0{,}8$$

$$u_3 = x_3^* = 0{,}8 > 0 \text{ für die aktive Restriktion } g_3(X) = 0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Maschinenwesen
Festkörpermechanik
Getriebelehre